

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

Кафедра «Теоретическая и прикладная механика»

Учебное пособие

Расчет статически определимых конструкций при различных видах нагружения

Ростов-на-Дону

2019

Авторы:

д-р физ.–мат. наук, проф. А.Н. Соловьев,
канд. техн. наук, доц. О.Н. Лесняк,
канд. техн. наук, доц. И.Н. Вислоусова,
канд. техн. наук, доц. В.В. Котов,
канд. физ.–мат. наук, доц. А.А. Матросов
ассистент Н.И. Глушко

Настоящее учебное пособие предназначено для углубленного изучения дисциплины «Прикладная механика» и является вспомогательным материалом при выполнении расчетно-графической работы студентами, обучающимися по направлению подготовки 150306 Мехатроника и робототехника. Разработано в соответствии с программой и Государственным образовательным стандартом в части требований к обязательному минимальному уровню подготовки выпускников указанного направления подготовки. Может быть также использовано в процессе самостоятельной работы студентами, обучающимися по другим направлениям подготовки, изучающих дисциплины «Прикладная механика», «Механика», «Механика материалов и конструкций», «Сопротивление материалов». Содержит четыре раздела с краткими теоретическими сведениями и примерами выполнения задач расчетно-графической работы, а также приложение с заданиями и требованиями по оформлению работы, список литературы.

Научный редактор - д-р физ.–мат. наук, проф. А.Н. Соловьев

Рецензент – д-р. физ.–мат. наук, доц. М.И. Карякин

Рецензент – канд. физ.–мат. наук, доц. А.С. Скалиух

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4
Раздел I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	6
1.1 Краткие теоретические сведения.....	6
1.2 Пример выполнения задачи.....	10
Раздел II. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ- СЖАТИИ.....	12
2.1 Краткие теоретические сведения.....	12
2.2 Пример выполнения задачи.....	16
Раздел III. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕ- НИИ.....	21
3.1 Краткие теоретические сведения.....	21
3.2 Пример выполнения задачи.....	24
Раздел IV. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ИЗ- ГИБЕ.....	29
4.1 Краткие теоретические сведения.....	29
4.2 Пример выполнения задачи.....	33
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	38
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	52

ПРЕДИСЛОВИЕ

В процессе подготовки высококвалифицированных кадров по образовательным программам высшего образования очень важно использовать комплексный подход к изучению студентами дисциплин, включающий не только теоретические и практические занятия, но и самостоятельную работу студента.

Важным элементом самостоятельной работы является расчетно-графическая работа, способствующая закреплению студентами базовых и получению углубленных теоретических и практических знаний по дисциплине.

Расчетно-графическая работа «Расчет статически определимых конструкций при различных видах нагружения» содержит четыре раздела:

- определение реакций связей статически определимых конструкций;
- расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии;
- расчет на прочность и жесткость при кручении;
- расчет на прочность и жесткость при изгибе.

По каждому разделу выполняются указанные ниже задания.

Раздел I. Определение реакций связей статически определимых конструкций.

- определить реакции опор и давление во внутреннем шарнире составной плоской рамы.

Раздел II. Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии.

Для статически определимого бруса необходимо:

- определить продольные усилия, построить эпюру продольных усилий;
- подобрать поперечные сечения, исходя из условий прочности;
- построить эпюры нормальных напряжений и линейных перемещений поперечных сечений.

Раздел III. Расчет на прочность и жесткость при кручении.

Для статически определимого бруса необходимо:

- определить крутящие моменты, построить эпюру крутящих моментов;
- подобрать поперечные сечения, исходя из условий прочности;

- построить эпюры максимальных касательных напряжений и угловых перемещений поперечных сечений.

Раздел IV. Расчет на прочность и жесткость при изгибе.

Для статически определимой балки необходимо:

- определить поперечные силы и изгибающие моменты, построить эпюры;
- подобрать поперечные сечения простой геометрической формы (прямоугольник, круг, кольцо), исходя из условий прочности;
- для прямоугольного сечения построить графики нормальных и касательных напряжений в опасном сечении балки.

Исходные данные приведены в Приложении – таблицы ПЗ.1 и ПЗ.3, расчетные схемы конструкций – таблицы ПЗ.2 и рисунок ПЗ.1, механические характеристики материалов – таблицы ПЗ.4 – ПЗ.7.

Пример выбора исходных данных и построения схемы конструкций приведен в Приложении.

СОДЕРЖАНИЕ ГРАФИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

Графическая часть должна содержать:

Лист 1 Определение реакций связей статически определимых конструкций:

- заданные расчетные схемы;
- схемы сил, действующих на конструкции, освобожденные от внешних связей;
- схемы сил, действующих на каждую часть конструкции (для составной рамы).

Лист 2 Расчет на прочность и жесткость при растяжении - сжатии и

Лист 3 Расчет на прочность и жесткость при кручении:

- расчетные схемы статически определимых брусьев; эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений (для брусьев, работающих на растяжение-сжатие); эпюры крутящих моментов, наибольших касательных напряжений и угловых перемещений (для брусьев, работающих на кручение).

Лист 4. Расчет на прочность и жесткость при изгибе.

- расчетную схему статически определимой балки; эпюры поперечных сил и изгибающих моментов; графики нормальных и касательных напряжений в опасном сечении (для прямоугольного сечения).

Раздел I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ КОНСТРУКЦИЙ

1.1 Краткие теоретические сведения

Тело, которое может совершать любое перемещение в пространстве, называется свободным. Если перемещению тела в пространстве препятствуют какие-нибудь другие тела, скрепленные или соприкасающиеся с ним, то такое тело называется несвободным. Все то, что ограничивает перемещение тела в пространстве, называется связью. Тело, стремясь под действием сил осуществить перемещение, будет воздействовать на связь с некоторой силой. Одновременно связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой, называемой реакцией связи. Реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

Рассмотрим, как направлены реакции некоторых часто встречающихся видов связей.

Гладкая поверхность или опора.

Гладкой называют поверхность, трением тела о которую можно пренебречь. Реакция гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке (рисунок 1.1, а). Если одна из поверхностей – точка, то реакция направлена по нормали к другой поверхности (рисунок 1.1, б).

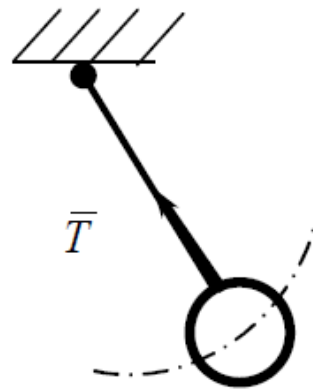
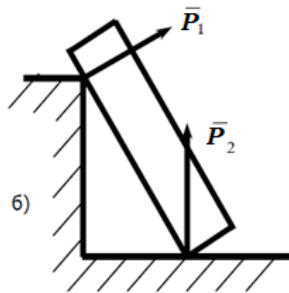
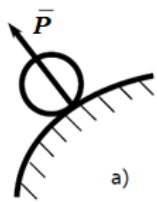


Рисунок 1.1 – Гладкая поверхность или опора. Направление реакций связи.

Рисунок 1.2 – Связь в виде гибкой нерастяжимой нити.

Нить.

Связь в виде гибкой нерастяжимой нити (рисунок 1.2) не дает телу удалиться от точки подвеса. Реакция связи направлена вдоль нити к точке ее подвеса.

Шарнирная опора.

Шарнирная неподвижная опора (рисунок 1.3, опора A) имеет реакцию \bar{R}_A , направленную произвольно и лежащую в плоскости, перпендикулярной оси шарнира.

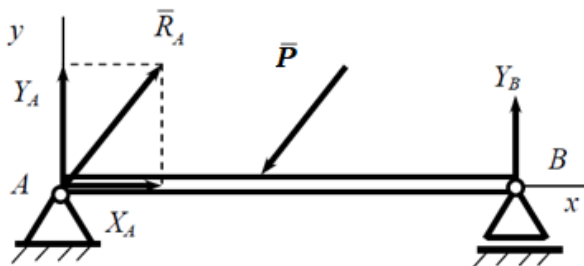


Рисунок 1.3 – Шарнирная опора. Направление реакций связи.

Реакция \bar{R}_A может быть разложена на две составляющие: X_A и Y_A . Тогда модуль реакции

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}. \quad (1.1)$$

Шарнирная подвижная опора (рисунок 1.3, опора B) имеет реакцию Y_B , направленную перпендикулярно опорной поверхности.

Сферический шарнир.

Сферический шарнир (рисунок 1.4, а) и подпятник (рисунок 1.4, б) имеют реакцию \overline{R}_A , направленную в пространстве произвольно. При решении задач реакция может быть разложена на три составляющих X_A, Y_A, Z_A .

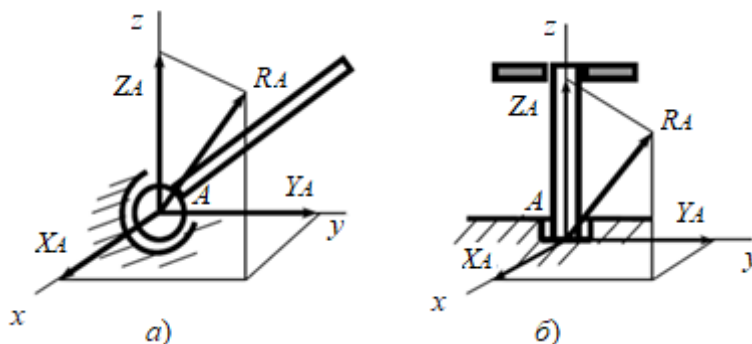


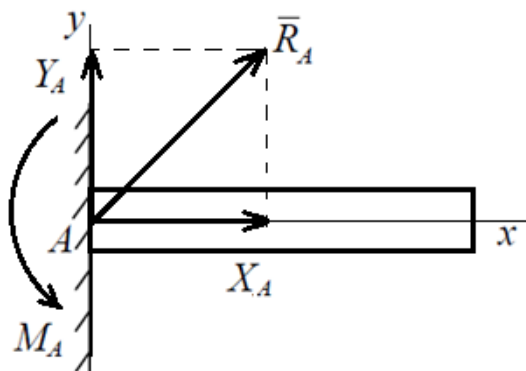
Рисунок 1.4 – Сферический шарнир и подпятник. Направление реакций связи.

Жесткая заделка (неподвижно защемленная опора)

Имеет реакцию \overline{R}_A , заранее не известную по направлению и по модулю, и момент M_A . Для плоской системы сил (рис.1.5) реакция \overline{R}_A может быть разложена на составляющие X_A и Y_A и момент M_A . Для пространственной системы сил составляющих реакции \overline{R}_A будет три (по числу координатных осей x, y, z).

Рисунок 1.5 – Жесткая заделка.

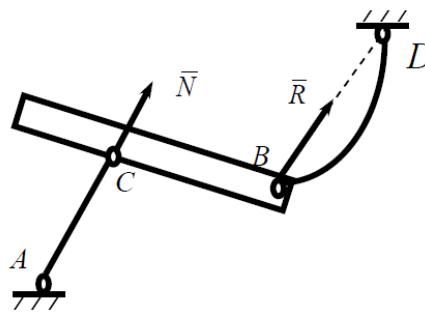
Направление реакций связи.



Невесомый стержень.

Это такой стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой нагрузкой можно пренебречь. Реакция такого стержня (шарнирно прикрепленного) направлена вдоль оси стержня AC (рис.1.6), а у криволинейного стержня BD реакция \overline{R} направлена вдоль прямой, соединяющей точки B и D .

Рисунок 1.6 – Невесомый стержень. Направление реакций связи.



Реакции опор необходимо рассматривать как нагрузки (силы и моменты), действующие на рассматриваемое тело со стороны опор. Необходимым и достаточным условием равнове-

сия тела является равенство нулю главного вектора \bar{R} и главного момента \bar{M} всех внешних сил (в том числе и реакций связей), т.е. выполнение условий:

$$\bar{R} = 0, \bar{M} = 0. \quad (1.2)$$

При аналитическом способе задания сил главный вектор $\bar{R} = 0$ и главный момент $\bar{M} = 0$, если выполняются условия:

$R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0$ и $M_x = 0, M_y = 0, M_z = 0$, т.е. когда

$$\sum P_x = 0, \sum P_y = 0, \sum P_z = 0.$$

$$\sum m_x(\bar{P}) = 0, \sum m_y(\bar{P}) = 0, \sum m_z(\bar{P}) = 0. \quad (1.3)$$

Следовательно, для равновесия пространственной системы сил необходимо, чтобы выполнялись условия (1.2). Для плоской системы сил условиями равновесия являются:

$$\sum P_x = 0, \sum P_y = 0, \sum m_O(\bar{P}_i) = 0, \quad (1.4)$$

где O – любая фиксированная точка плоскости.

Условия (1.3) являются основной формой записи условий равновесия для плоской системы сил. На практике применяются другие формы записи условий равновесия:

$$\sum X_i = 0, \sum M_A(\bar{P}_i) = 0, \sum M_B(\bar{P}) = 0 \quad (1.5)$$

$$\sum m_A(\bar{P}_i) = 0, \sum m_B(\bar{P}_i) = 0, \sum m_C(\bar{P}_i) = 0 \quad (1.6)$$

При использовании формы записи условия равновесия (1.6), называемой уравнением трех моментов, необходимо учитывать, что точки A, B и C не должны лежать на одной прямой.

1.2 Пример выполнения задачи

Задача 1. Определить реакции опор и давление во внутреннем шарнире составной плоской рамы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ

1. Определяются места приложения и направления внешних нагрузок, строится расчетная схема.
2. Выбирается система координатных осей, вводятся реакции опор, строится схема сил, действующих на конструкцию в целом.
3. Составная рама разрезается по внутреннему шарниру, вводятся реакции внутреннего шарнира, строятся схемы сил, действующих на каждую часть конструкции.
4. Составляются системы уравнений равновесия, определяются реакции связей.
5. Составляются дополнительные уравнения равновесия, выполняется проверка правильности расчетов.

Задание

Определить реакции опор и давление во внутреннем шарнире составной плоской рамы, находящейся в равновесии под действием заданных нагрузок.

Исходные данные (таблицы ПЗ.1 и ПЗ.2):

№:	0	0	1
	A	B	C

Схема № 1 (рисунок 1.7);

$a=0,2$ м; $M=3$ кН м; $P_1=2$ кН; $\alpha_1=45^\circ$; точка приложения H; $P_2=4$ кН; точка приложения E; $\alpha_2=60^\circ$; $q=5$ кН/м; участок действия нагрузки CL.

РЕШЕНИЕ

Равнодействующая распределенной нагрузки:

$$Q = q l_{CL}; l_{CL} = 4a \Rightarrow Q = 4,0 \text{ кН};$$

Составляющие сосредоточенных нагрузок:

$$P_{1x} = P_1 \cos 45^\circ = 1,414 \kappa H; P_{1y} = P_1 \sin 45^\circ = 1,414 \kappa H;$$

$$P_{2x} = P_2 \cos 60^\circ = 2,0 \kappa H; P_{2y} = P_2 \sin 60^\circ = 3,464 \kappa H$$

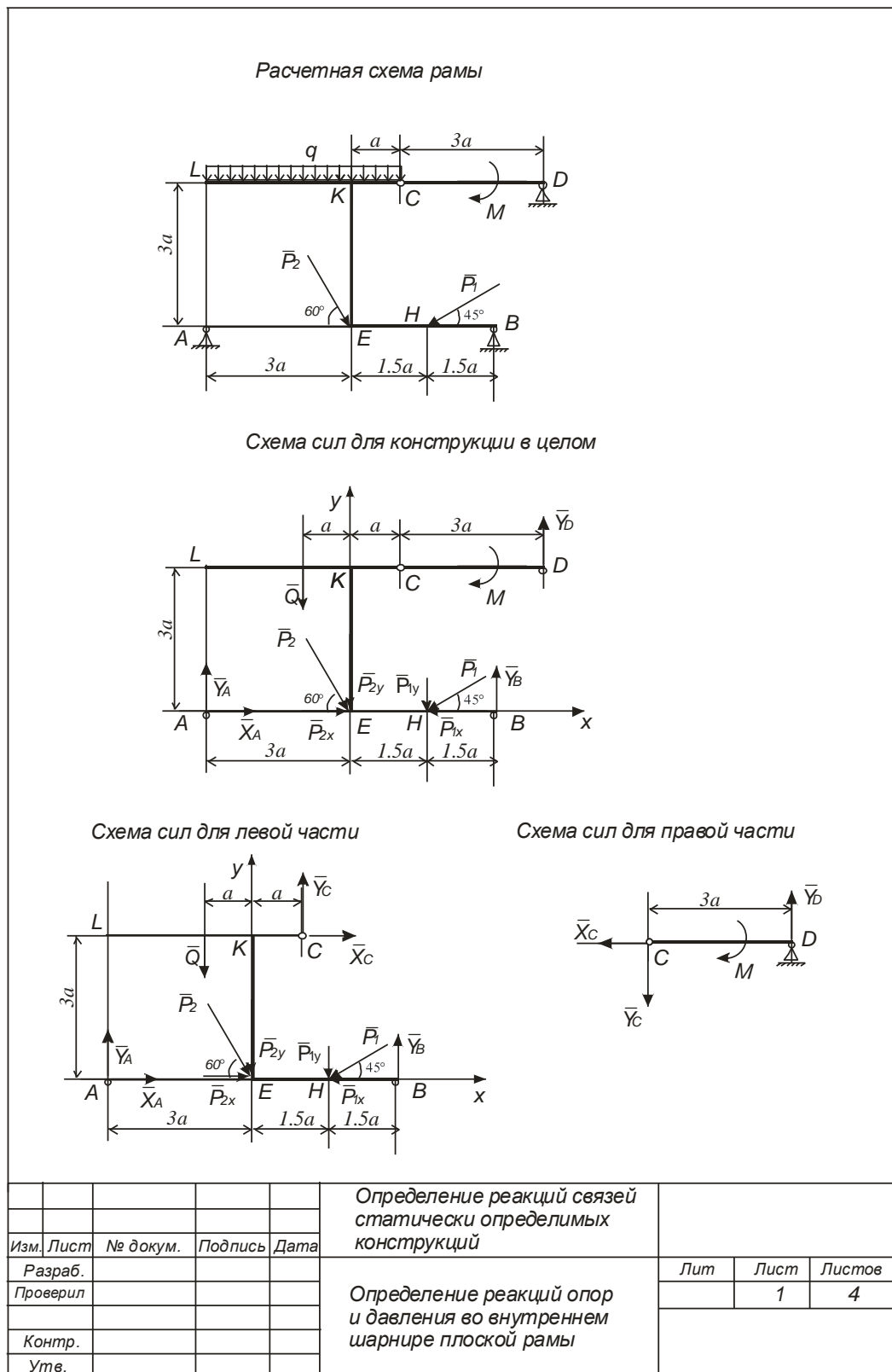


Рисунок 1.7 – Графическая часть задачи

Конструкцию разобьем на две части по внутреннему шарниру С. Уравнения равновесия левой половины:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow X_C + X_A - P_{1x} + P_{2x} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_C + Y_B + Y_A - P_{1y} - P_{2y} - Q = 0;$$

$$\sum M_c^i = 0 \Rightarrow X_A 3a - Y_A 4a + Y_B 2a - P_{1y} 0,5a - P_{1x} 3a + P_{2y} a + P_{2x} 3a + Q 2a = 0$$

Уравнения равновесия правой половины:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow -X_C = 0;$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -Y_C + Y_D = 0;$$

$$\sum M_c^i = 0 \Rightarrow Y_D 3a - M = 0$$

Определяем неизвестные реакции связей

$$X_C = 0;$$

$$Y_D = \frac{M}{3a} = 5,0 \text{ кН};$$

$$Y_C = Y_D = 5,0 \text{ кН};$$

$$X_A = P_{1x} - P_{2x} = -0,586 \text{ кН};$$

$$Y_A = \frac{X_A 3a + Y_B 2a - P_{1y} 0,5a + P_{2y} a - P_{1x} 3a + P_{2x} 3a + Q 2a}{4a} = 3,086 \text{ кН};$$

$$Y_B = -Y_C - Y_A + P_{1y} + P_{2y} + Q = 0,793 \text{ кН}$$

Составим проверочное уравнение для конструкции, не разделенной по шарниру С:

$$\begin{aligned} \sum M_E^i = 0 &\Rightarrow Y_D 4a - M + Qa + Y_B 3a - P_{1y} 1,5a - Y_A 3a = \\ &= 5,0 \cdot 0,8 - 3,0 + 4,0 \cdot 0,2 + 0,793 \cdot 0,6 - 1,414 \cdot 0,3 - 3,086 \cdot 0,6 = 0 \end{aligned}$$

Проверка сошлась.

Раздел II. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

2.1 Краткие теоретические сведения

Под растяжением (сжатием) понимается такой вид деформации, когда при нагружении в поперечных сечениях бруса возникают только один внутренний силовой фактор – сжимающая или растягивающая продольная сила N . Примером

растяжения может служить брус, растягиваемый силами, приложенными к его концам (рисунок 2.1).

Для определения внутренних сил и напряжения рассмотрим стержень с постоянной площадью поперечного сечения F , м^2 , который подвергается растяжению силами P , рисунок 2.1.

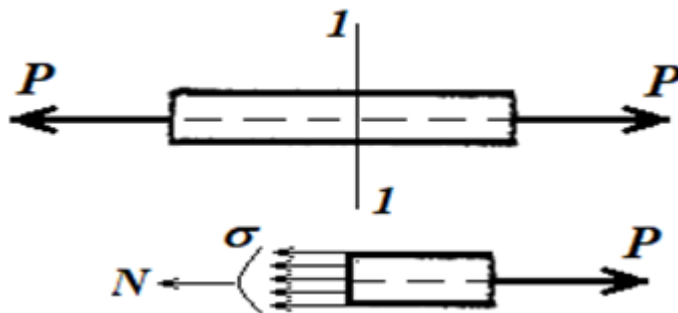


Рисунок 2.1 – Внутренние силы при растяжении (сжатии)

При этом предполагается, что плоские сечения, нормальные к оси стержня до деформации, остаются и после деформации плоскими и нормальными к его оси. Эта гипотеза называется гипотезой плоских сечений. Внутренние силы и напряжения в любом сечении бруса определяются с помощью метода сечений.

Плоскостью, перпендикулярной к оси бруса мысленно разрежем его по данному сечению и отбросим одну из полученных двух частей, например, левую (рисунок 2.1). Для обеспечения равновесия оставшейся части приложим по всему сечению в каждой его точке внутренние силы, которые должны заменить действие отброшенной части на оставшуюся часть бруса.

Равнодействующая внутренних сил N легко определяется из условия равновесия с помощью уравнения статики:

$$\sum X = N - P = 0,$$

откуда $N=P$.

Если считать, что внутренние силы равномерно распределены по сечению, то нормальные напряжения во всех точках сечения будут одинаковыми и могут быть определены по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}, \quad (2.1)$$

где F – площадь поперечного сечения.

При действии растягивающих сил по оси бруса длина его увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются. При действии сжимающих усилий происходит обратное явление. На рисунке 2.2 показан брус, растягиваемый двумя силами P . В результате растяжения брус удлинился на величину Δl , которая называется абсолютным удлинением, и получим абсолютное поперечное сужение Δa .

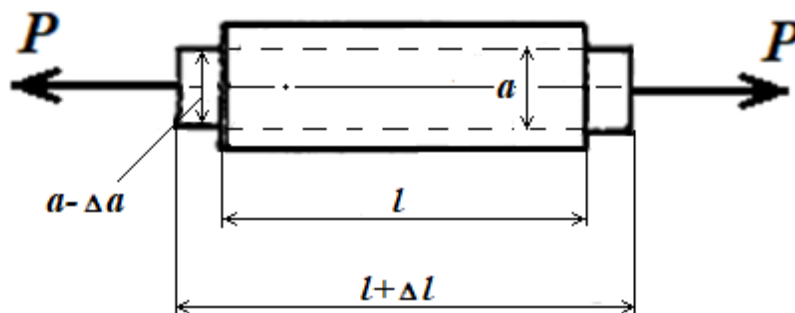


Рисунок 2.2 – Брус, растягиваемый силами.

Отношение величины абсолютного удлинения и укорочения к первоначальной длине или ширине бруса называется относительной деформацией. В данном случае деформация $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ называется относительная продольной деформацией.

В пределах упругих деформаций установлено, что нормальное напряжение прямо пропорционально относительной продольной деформации. Эта зависимость называется законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.2)$$

где E - коэффициент пропорциональности, называемый модулем нормальной упругости.

Если в формулу закона Гука (2.2) подставить выражения $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ и $\sigma = \frac{P}{F}$,

то получим формулу для определения удлинения или укорочения при растяжении и сжатии:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}, \quad (2.3)$$

где произведение EF называется жесткостью бруса при растяжении–сжатии.

Для обеспечения прочностных характеристик конструкции необходимо, чтобы выполнялось условие прочности – наибольшее напряжение в точках любого поперечного сечения элемента конструкций не должно превышать допускаемого напряжения для данного материала. Поэтому условие прочности для растягиваемого или сжимаемого бруса можно выразить следующей расчетной формулой:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (2.4)$$

Практические расчеты на растяжение и сжатие сводятся к определению одной из неизвестных величин, входящих в эту формулу по двум известным или легко определяемым из условий задач (величина $[\sigma]$ обычно известна).

Применение формулы (2.4) позволяет решить три рода задач на растяжение, сжатие.

1. Даны размеры поперечного сечения стержня (или его площадь F) и величина продольной силы N (или имеются все данные для ее определения). Требуется определить величину наибольшего напряжения в сечении стержня. Для данного случая при решении задачи следует пользоваться формулой (2.4).

В результате решения может оказаться, что величина действительного напряжения в сечении σ превышает допускаемое напряжение $[\sigma]$, тогда необходимо или увеличить площадь поперечного сечения, или, если это возможно, уменьшить нагрузку.

Разрешается превышение или понижение наибольших напряжений по сравнению с допускаемым до $\pm 5\%$.

2. Известна или может быть определена из условия задачи величина продольной силы N в сечении и допускаемое напряжение материала $[\sigma]$; требуется определить необходимую площадь F поперечного сечения стержня или, как говорят, подобрать его сечение. В этом случае задача решается по формуле:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (2.5)$$

3. Даны размеры поперечного сечения, а также допускаемое напряжение материала; требуется определить значение наибольшей нагрузки на стержень.

Из формулы (2.4) получаем:

$$N = F[\sigma]. \quad (2.6)$$

2.2 Пример выполнения задачи

Задача 2. Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ

1. Определяется реактивная сила в заделке бруса.
2. Брус разбивается на участки.
3. На каждом участке определяется продольная сила в сечении бруса и строится эпюра продольных сил.
4. Устанавливается опасный участок, для которого записывается условие прочности подбирается сечение. Вычисляются нормальные напряжения в сечениях бруса. Строится эпюра нормальных напряжений.
5. Вычисляются абсолютное удлинение (укорочение) бруса и перемещения поперечных сечений. Строится эпюра.

Задание

Для статически определимого бруса необходимо:

- определить продольные усилия, построить эпюру продольных усилий;
- подобрать поперечные сечения, исходя из условий прочности;
- построить эпюры нормальных напряжений и линейных перемещений поперечных сечений.

В расчетах на прочность допускаемые напряжения принять:

- для стали и сплавов $[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n}$, $[\tau] = 0,6[\sigma]$, где σ_m - предел текучести;
- для чугуна и пластмасс $[\sigma]_p = \frac{\sigma_B^p}{n}$, $[\sigma]_c = \frac{\sigma_B^c}{n}$, где σ_B^p, σ_B^c – пределы

прочности на растяжение и сжатие; коэффициент запаса $n=3$.

Исходные данные (таблица ПЗ.3, расчетные схемы конструкций –рисунок ПЗ.1, механические характеристики материалов – таблицы ПЗ.4 – ПЗ.7).

№:	0	0	1
	A	B	C

Схема № 1;

$l=10a=1,0 \text{ м}; a=0,1 \text{ м}; a_1=2a=0,2 \text{ м}; a_2=3a=0,3 \text{ м}; a_3=2a=0,2 \text{ м}; a_4=2a=0,2 \text{ м};$

$q=5 \text{ кН/м}; P_1=qa=0,5 \text{ кН}; 2P_1=1,0 \text{ кН}; P_2=5,5qa=2,75 \text{ кН}; 2P_2=5,5 \text{ кН};$

$d=0,8D.$

Материал: брус I - У5-301-41

Механические характеристики материала:

У5-301-41: $E=2300 \text{ МПа}; \sigma_{\sigma}^p=50 \text{ МПа}; \sigma_{\sigma}^c=180 \text{ МПа};$

Коэффициент запаса принять $n=3.$

РЕШЕНИЕ

Определим реактивную силу R_A , возникающую в заделке (рисунок 2.3). Уравнение равновесия для статически определимого бруса:

$$R_A - 2P_1 + 2P_2 = 0 \Rightarrow R_A = 2P_1 - 2P_2 = -9qa = -4,5 \text{ кН}.$$

Определим продольные силы на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \leq z \leq 2a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса: $N_1 = 0,$

так как на первом участке нагружения внешние силы не действуют.

II участок: $2a \leq z \leq 3a$

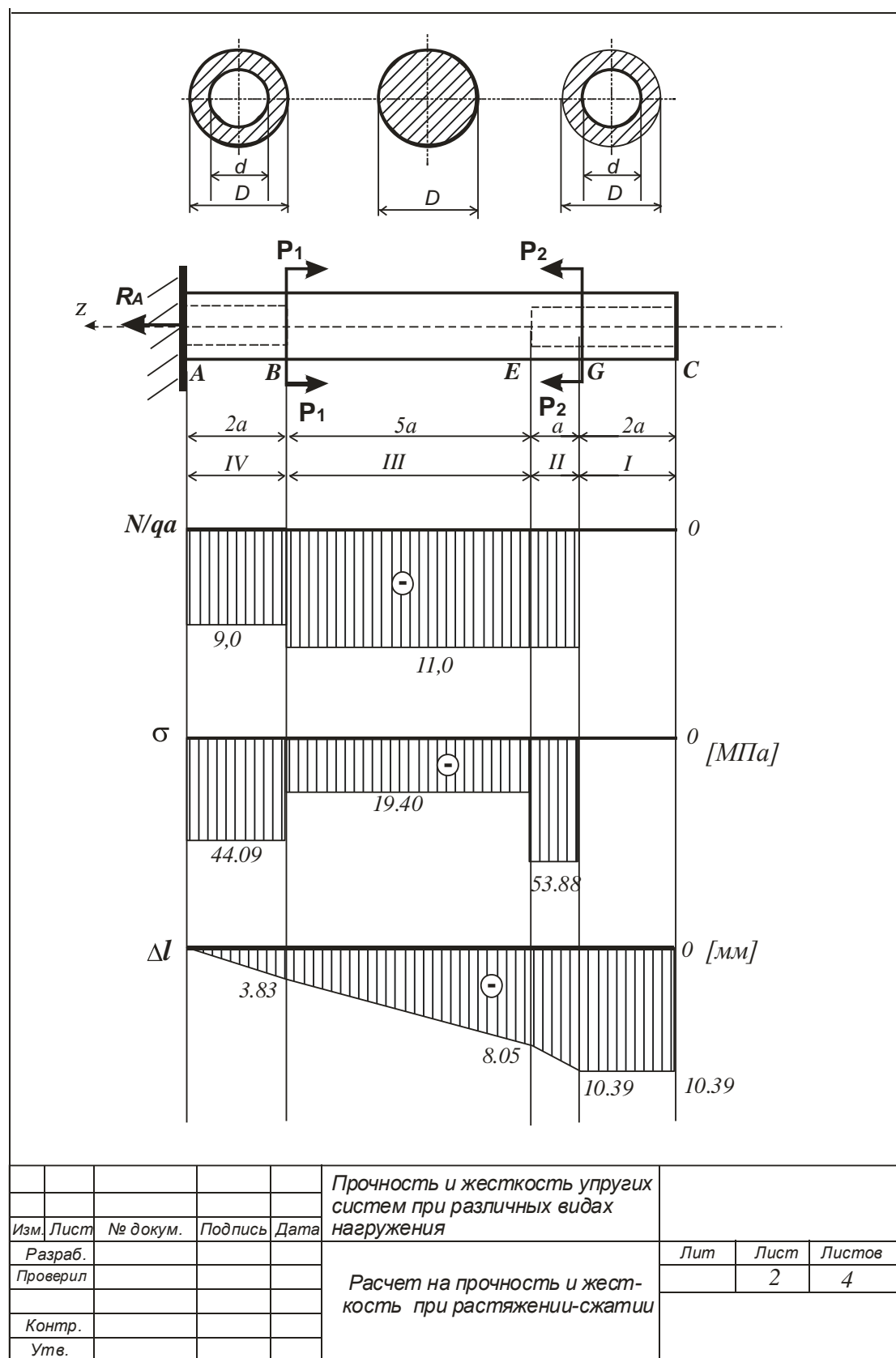


Рисунок 2.3 – Графическая часть

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$N_2 + 2P_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -2P_2 = -11qa = -5,5 \text{ кН} ,$$

III участок: $3a \leq z \leq 8a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$N_3 + 2P_2 = 0 \Rightarrow N_3 = -2P_2 = -11qa = -5,5 \text{ кН} ,$$

IV участок: $8a \leq z \leq 10a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$N_4 - 2P_1 + 2P_2 = 0 \Rightarrow N_4 = 2P_1 - 2P_2 = -9qa = -4,5 \text{ кН} .$$

Выразим площади поперечных сечений через параметр D ($d=0,8D$).

I участок: $F_1 = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 0,283 D^2 ;$

II участок: $F_2 = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 0,283 D^2 ;$

III участок: $F_3 = \frac{\pi D^2}{4} = 0,785 D^2 ;$

IV участок: $F_4 = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 0,283 D^2$

Опасным участком, т.е. участком на котором возникают максимальные напряжения, является второй участок нагружения. Составим условие прочности для второго участка:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{11qa}{0,283D^2} \leq [\sigma]^c = \frac{\sigma_s^c}{n} = 60 \text{ МПа}$$

Определим диаметр D из условия прочности:

$$D \geq \sqrt{\frac{11qa}{[\sigma]^c \cdot 0,283}} = \sqrt{\frac{11 \cdot 5000 \cdot 0,1}{60 \cdot 10^6 \cdot 0,283}} = 0,01801 \text{ м} = 18,01 \text{ мм}.$$

$$\text{Принимаем } D=0,019 \text{ м} = 19 \text{ мм}, d=0,8D=0,0152 \text{ м} = 15,2 \text{ мм}$$

Площади поперечных сечений бруса:

I участок: $F_1 = 1,02 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 ;$

$$\text{II участок: } F_2 = 1,02 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \text{ III участок: } F_3 = 2,84 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$\text{IV участок: } F_4 = 1,02 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

Напряжения в поперечных сечениях статически определимого бруса

$$\text{I участок: } \sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = 0 \text{ МПа};$$

$$\text{II участок: } \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = -38,90 \frac{qa}{D^2} = -53,88 \text{ МПа};$$

$$\text{III участок: } \sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = -14,01 \frac{qa}{D^2} = -19,40 \text{ МПа};$$

$$\text{IV участок: } \sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = -31,83 \frac{qa}{D^2} = -44,09 \text{ МПа}$$

Определим абсолютное удлинение бруса, как сумму удлинений участков:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = 0;$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E F_2} = -38,90 \frac{qa^2}{ED^2} = -2,34 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E F_3} = -70,03 \frac{qa^2}{ED^2} = -4,22 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 l_4}{E F_4} = -63,66 \frac{qa^2}{ED^2} = -3,83 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = -172,59 \frac{qa^2}{ED^2} = -10,39 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Определим перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

$$\text{сечение } A \text{ (жесткая заделка): } \Delta_A = 0;$$

$$\text{сечение } B: \Delta_B = \Delta_A + \Delta l_4 = -3,83 \text{ мм};$$

$$\text{сечение } E: \Delta_E = \Delta_B + \Delta l_3 = -8,05 \text{ мм};$$

$$\text{сечение } G: \Delta_G = \Delta_E + \Delta l_2 = -10,39 \text{ мм};$$

$$\text{сечение } C: \Delta_C = \Delta_G + \Delta l_1 = -10,39 \text{ мм}.$$

РАЗДЕЛ III. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ.

3.1 Краткие теоретические сведения

При работе бруса на кручение в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент $M_{кр}$ (рисунок 3.1). В любом сечении бруса крутящий момент численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. При кручении бруса круглого сечения экспериментально установлено:

- ось бруса не искривляется;
- соблюдается гипотеза плоских сечений;
- радиусы не искривляются, а поворачиваются;
- расстояния между поперечными сечениями не изменяются.

На основании этого можно заключить, что кручение – чистый сдвиг. Следовательно, в поперечных сечениях бруса при кручении возникают только касательные напряжения τ . Вектор касательного напряжения лежит в плоскости поперечного сечения.

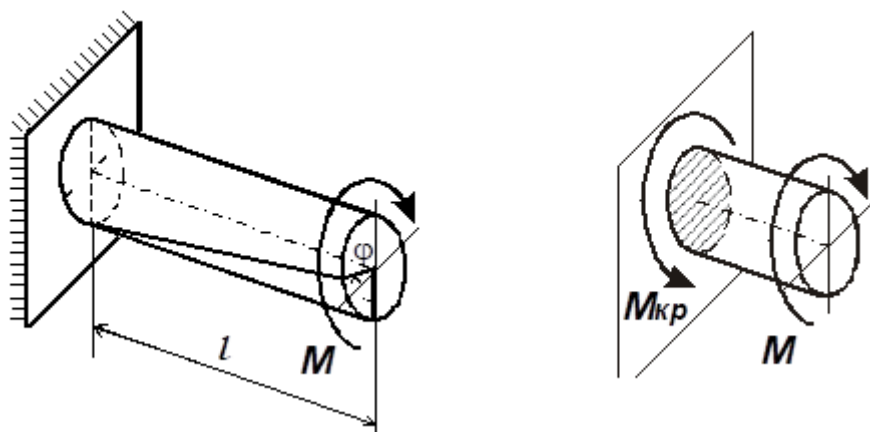


Рисунок 3.1- Кручение бруса

Вследствие гипотезы плоских сечений, напряжения в каждой точке сечения перпендикулярны радиусу, проведенному в эту точку, и пропорциональны расстоянию от точки до центра сечения (формула 3.1), распределяются неравномерно, изменяясь по линейному закону — от нуля на оси до максимального

значения у поверхности скручиваемого стержня (рисунок 3.2) определяются по формуле (3.2).

$$\tau = \frac{M}{J_p} \rho \quad (3.1)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_p}, \quad (3.2)$$

где ρ – радиус-вектор точки сечения, в которой определяется напряжение, J_p , W_p – геометрические характеристики сечения.

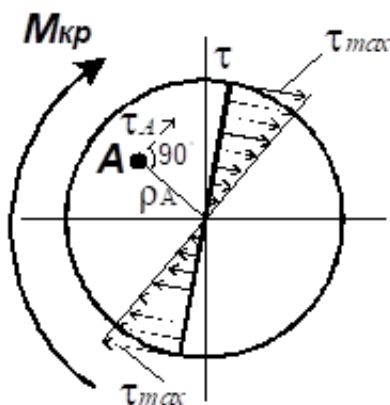


Рисунок 3.2 – Эпюра распределения касательных напряжений по сечению бруса

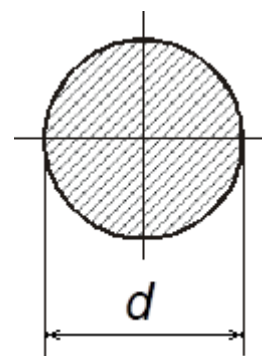
Геометрические характеристики круглого сечения, используемые в расчетах на кручение.

Полярный момент инерции сечения:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4, \quad (м^4).$$

Полярный момент сопротивления сечения:

$$W_p = \frac{J_p}{0,5d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3, \quad (м^3).$$



Деформации при кручении:

Угол поворота одного сечения относительно другого называется углом закручивания φ (рад) участка бруса между этими сечениями (см. рисунок 3.1).

Определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_p}, \quad (3.3)$$

где GJ_p – жесткость сечения при кручении, G – модуль сдвига (для стали $G=8 \cdot 10^4$ Мпа), J_p – полярный момент инерции сечения, l – длина участка бруса.

Относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{кр}}{GJ_p} \text{ (рад/м)}. \quad (3.4)$$

Для деформации кручения применим закон Гука:

$$\tau = G\rho\theta = G\gamma, \quad (3.5)$$

где γ – угол сдвига.

Условие прочности при кручении бруса:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau], \quad (3.6)$$

где допускаемое касательное напряжение $[\tau] \approx (0,5 \div 0,6)[\sigma]$.

Условие прочности позволяет решать следующие виды задач:

- проектный расчет (подбор сечения): $d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{0,2[\tau]}}$;
- определение грузоподъемности $M_{кр\max} \leq [\tau]W_p$;
- проверка прочности (формула 3.6).

Условие жесткости при кручении бруса:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{GJ_p} \leq [\theta], \quad (3.7)$$

где допускаемый относительный угол закручивания $[\theta] \approx 0,05 \text{ рад/м}$.

Из условия жесткости можно определить радиус круглого сечения:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{M_{кр}}{0,1G[\theta]}}.$$

3.2 Пример выполнения задачи

Задача 3. Расчет на прочность и жесткость при кручении.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ

1. Определяется реактивный момент, возникающий в заделке бруса, брус разбивается на участки.
2. На каждом участке нагружения определяются крутящие моменты и строится эпюра крутящих моментов.
3. Устанавливается опасный участок, для которого записывается условие прочности и подбирается сечение. Вычисляются касательные напряжения в сечениях бруса. Строится эпюра касательных напряжений.
4. Вычисляются абсолютный угол закручивания бруса, как сумма углов закручивания участков бруса и угловые перемещения поперечных сечений. Строится эпюра.

Задание

Для статически определимого бруса

- определить крутящие моменты, построить эпюру крутящих моментов;
- подобрать поперечные сечения, исходя из условий прочности (принять коэффициент запаса $n=3$);
- построить эпюры максимальных касательных напряжений и угловых перемещений поперечных сечений.

Исходные данные (таблица ПЗ.3, расчетные схемы конструкций –рисунок ПЗ.1, механические характеристики материалов – таблицы ПЗ.4 – ПЗ.7).

№:	0	0	1
	А	В	С

Схема № 1; $l=10a=1,0$ м; $a=0,1$ м; $a_1=2a=0,2$ м; $a_2=3a=0,3$ м; $a_3=2a=0,2$ м; $a_4=2a=0,2$ м; $q=5$ кН/м; $m_1=9,0qa^2=0,45$ кН м²; $m_2=9,5qa^2=0,475$ кН м²; $d=0,8D$.

Материал: брус II - АД 33. Механические характеристики материала:

АД 33: $E=70000$ МПа; $G=27000$ МПа; $\sigma_m=180$ МПа; $\sigma_s=250$ МПа

Коэффициент запаса принять $n=3$.

РЕШЕНИЕ

Определим реактивный момент m_A , возникающий в заделке. (рисунок 3.3)

Уравнение равновесия для статически определимого бруса:

$$m_A - m_1 + m_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_A = m_1 - m_2 = -0,5qa^2 = -0,025 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим крутящие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \leq z \leq 2a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса: $M_1 = 0,$

так как на первом участке нагружения внешние моменты не действуют.

II участок: $2a \leq z \leq 3a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса: $M_2 = 0,$

III участок: $3a \leq z \leq 8a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$M_3 - m_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_3 = m_2 = 9,5qa^2 = 0,475 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

IV участок: $8a \leq z \leq 10a$

уравнение равновесия отсеченной части бруса:

$$M_4 + m_1 - m_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_4 = -m_1 + m_2 = 0,5qa^2 = 0,025 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Выразим моменты сопротивления поперечных сечений через диаметр D ($d=0,8D$).

$$\text{I участок:} \quad W_{p1} = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) = 0,1159 D^3;$$

$$\text{II участок:} \quad W_{p2} = \frac{\pi D^3}{16} = 0,1963 D^3;$$

$$\text{III участок:} \quad W_{p3} = \frac{\pi D^3}{16} = 0,1963 D^3;$$

$$\text{IV участок:} \quad W_{p4} = \frac{\pi d^3}{16} = 0,1005 D^3.$$

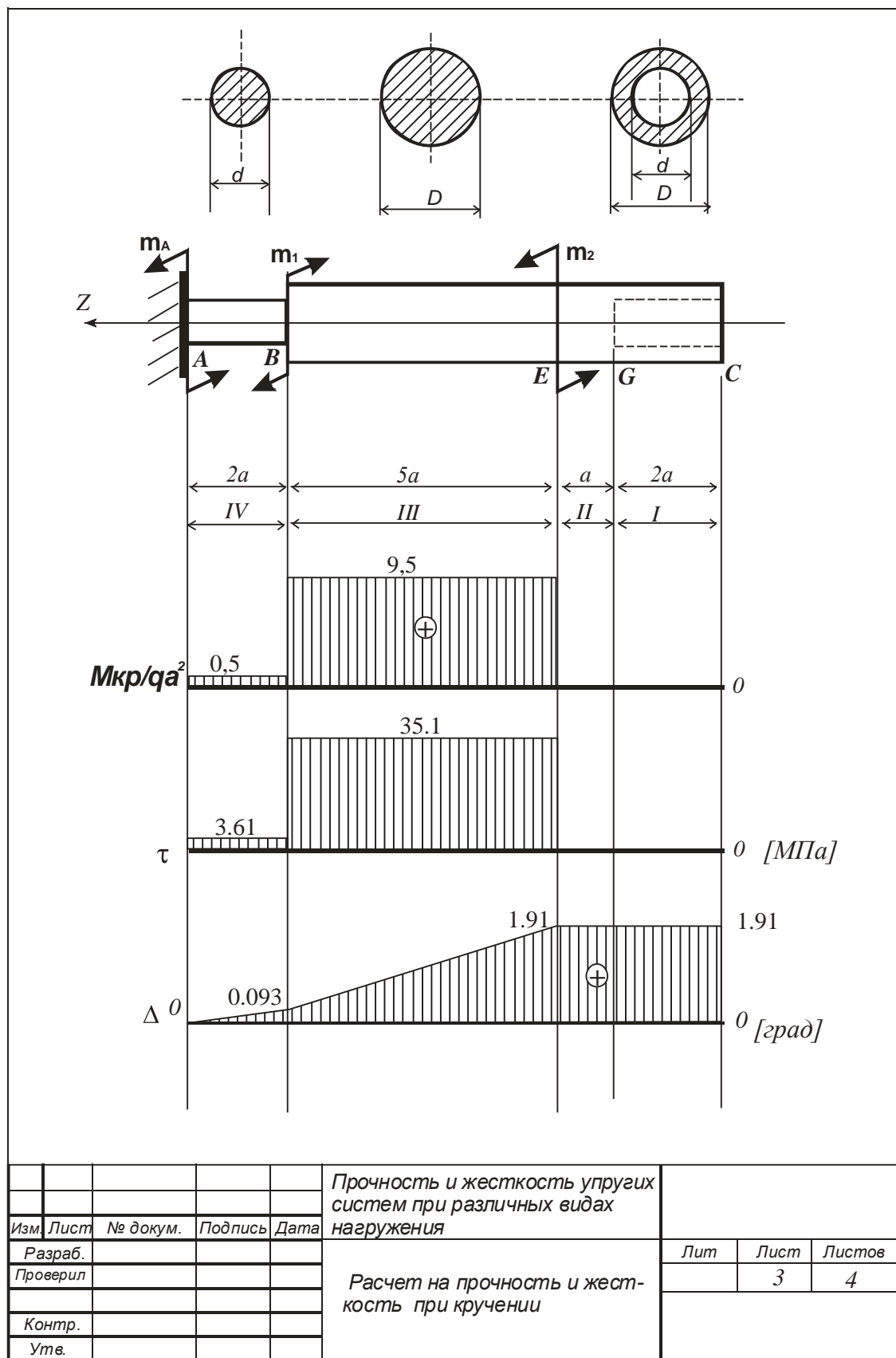


Рисунок 3.3 – Графическая часть

Полярные моменты инерции сечений бруса

$$\text{I участок: } J_{p1} = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) = 0,0580 D^4;$$

$$\text{II участок: } J_{p2} = \frac{\pi D^4}{32} = 0,0982 D^4;$$

$$\text{III участок: } J_{p3} = \frac{\pi D^4}{32} = 0,0982 D^4;$$

$$\text{IV участок: } J_{p4} = \frac{\pi d^4}{32} = 0,0402 D^4.$$

Опасным участком, т.е. участком на котором возникают максимальные касательные напряжения, является третий участок нагружения.

Составим условия прочности для третьего участка вала.

$$\tau_3 = \frac{M_3}{W_{p3}} = \frac{9,5qa^2}{0,1963D^3} \leq [\tau] = 0,6[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n} = 36 \text{ МПа}$$

Определим диаметр D из условия прочности:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{9,5qa^2}{[\tau] \cdot 0,1963}} = \sqrt[3]{\frac{9,5 \cdot 5000 \cdot 0,1^2}{36 \cdot 10^6 \cdot 0,1963}} = 0,04065 \text{ м} = 40,65 \text{ мм}.$$

Принимаем $D=0,041 \text{ м} = 41,0 \text{ мм}$, $d=0,8D=0,0328 \text{ м} = 32,8 \text{ мм}$

Полярные моменты сопротивления поперечных сечений бруса:

$$\text{I участок: } W_{p1} = 0,1159 D^3 = 7,99 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\text{II участок: } W_{p2} = 0,1963 D^3 = 13,53 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\text{III участок: } W_{p3} = 0,1963 D^3 = 13,53 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\text{IV участок: } W_{p4} = 0,1005 D^3 = 6,93 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Полярные моменты инерции сечений бруса

$$\text{I участок: } J_{p1} = 0,0580 D^4 = 0,164 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$\text{II участок: } J_{p2} = 0,0982 D^4 = 0,277 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$\text{III участок: } J_{p3} = 0,0982 D^4 = 0,277 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

IV участок: $J_{p4} = 0.0402 D^4 = 0,114 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$

Максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях статически определимого бруса

I участок: $\tau_1 = \frac{M_1}{W_{p1}} = 0 \text{ МПа};$

II участок: $\tau_2 = \frac{M_2}{W_{p2}} = 0 \text{ МПа};$

III участок: $\tau_3 = \frac{M_3}{W_{p3}} = 48,38 \frac{qa^2}{D^3} = 35,10 \text{ МПа};$

IV участок: $\tau_4 = \frac{M_4}{W_{p4}} = 4,97 \frac{qa^2}{D^3} = 3,61 \text{ МПа}.$

Определим абсолютный угол закручивания бруса, как сумму углов закручивания участков:

$$\Delta \phi_1 = \frac{M_1 l_1}{G J_{p1}} = 0;$$

$$\Delta \phi_2 = \frac{M_2 l_2}{G J_{p2}} = 0;$$

$$\Delta \phi_3 = \frac{M_3 l_3}{G J_{p3}} = 483,83 \frac{qa^3}{GD^4} = 0,0317 \text{ рад} = 1,817 \text{ град};$$

$$\Delta \phi_4 = \frac{M_4 l_4}{G J_{p4}} = 24,87 \frac{qa^3}{GD^4} = 0,0016 \text{ рад} = 0,0934 \text{ град}.$$

$$\Delta \phi = \Delta \phi_1 + \Delta \phi_2 + \Delta \phi_3 + \Delta \phi_4 = 508,70 \frac{qa^3}{GD^4} = 0,0333 \text{ рад} = 1,910 \text{ град}$$

Определим угловые перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

сечение A (жесткая заделка): $\Delta_A = 0;$

сечение B : $\Delta_B = \Delta_A + \Delta \phi_4 = 0,00163 \text{ рад} = 0,093 \text{ град};$

сечение E: $\Delta_E = \Delta_B + \Delta \phi_3 = 0,03333 \text{ рад} = 1,910 \text{ град};$

сечение G : $\Delta_G = \Delta_E + \Delta \phi_2 = 0,03333 \text{ рад} = 1,910 \text{ град};$

сечение C :

$$\Delta_C = \Delta_G + \Delta\phi_1 = 0,03333 \text{ рад} = 1,910 \text{ град};$$

РАЗДЕЛ IV. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ.

4.1 Краткие теоретические сведения

Брус испытывает прямой поперечный изгиб, если действующие на него нагрузки (сосредоточенные силы, распределенные нагрузки, пары сил) расположены в одной из главных плоскостей инерции и при этом силы перпендикулярны к продольной оси балки (рисунок 4.1). Брус, работающий на изгиб называется балкой. При изгибе в поперечных сечениях балки возникает два внутренних силовых фактора – изгибающий момент M ($H \cdot м$, $кН \cdot м$), и поперечная сила Q (H , $кН$). В частном случае поперечная сила может быть равна нулю. Такой изгиб называется *чистым*. Если же наряду с изгибающими моментами в сечениях балки возникают и поперечные силы, изгиб называют *поперечным*.

При изгибе предполагается:

- в изогнутой балке поперечные сечения остаются плоскими и расположены перпендикулярно к изогнутой оси балки (гипотеза плоских сечений);
- продольные слои балки не оказывают бокового давления;
- материал балки однороден;
- деформации слоев пропорциональны нормальным напряжениям.

Изгибающий момент в сечении балки вызывает появление нормальных напряжений σ , а поперечная сила – касательных напряжений τ (как правило $\tau \ll \sigma$).

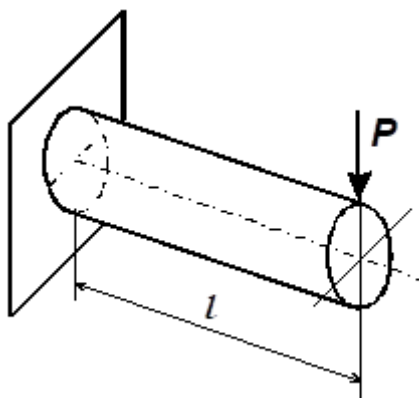


Рисунок 4.1 – Деформация изгиба

Поперечная сила Q в любом поперечном сечении численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих *по одну сторону от проведенного сечения*.

Изгибающий момент M в произвольном поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих *по одну сторону от сечения*, относительно той из главных центральных осей этого сечения, которая перпендикулярна плоскости нагружения.

Правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов представлено на рисунке 4.2.

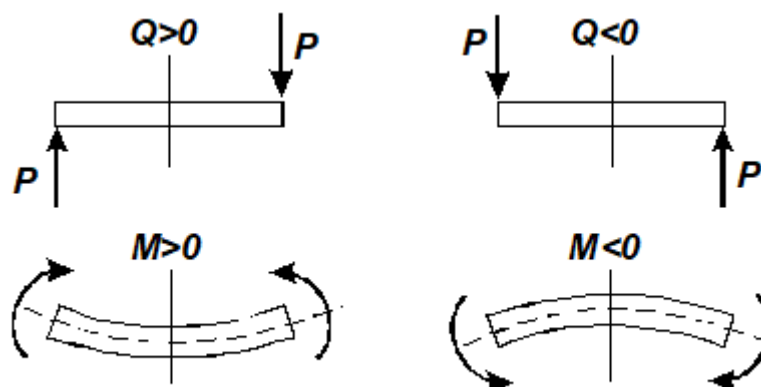


Рисунок 4.2 – Правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов

Поперечная сила в сечении положительна, если внешние нагрузки вращают отсеченную часть балки по часовой стрелке. Изгибающий момент в сечении положителен, если внешние нагрузки стремятся сжать верхние волокна балки.

Нормальные напряжения по высоте поперечного сечения балки изменяются по линейному закону (формула 4.1). На верхней и нижней границах сечения напряжения максимальны (формула 4.2) При растяжении продольных волокон балки напряжения положительны, при сжатии – отрицательны. Ось x – нейтральная ось сечения, на которой напряжения равны нулю (рисунок 4.3).

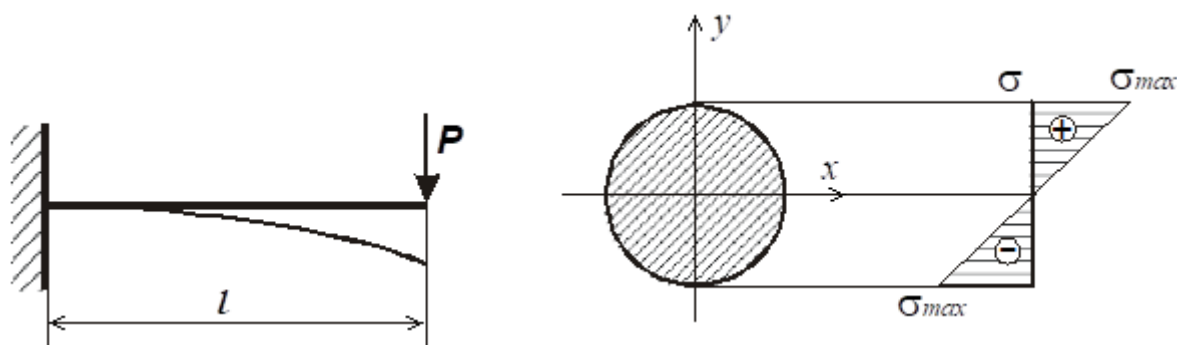


Рисунок 4.3 – Деформация изгиба. Распределение нормальных напряжений по высоте поперечного сечения

$$\sigma = \frac{M}{J_x} \cdot y, \quad (4.1)$$

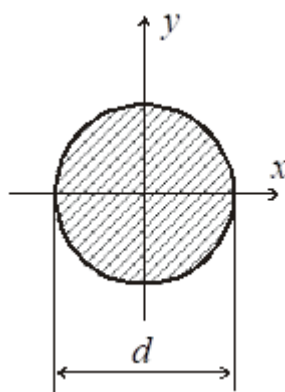
где M – изгибающий момент, J_x – осевой момент инерции сечения, y – расстояние от нейтральной оси до точки для которой определяется напряжение.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x}, \quad (4.2)$$

где W_x – осевой момент сопротивления сечения.

Геометрические характеристики сечений, используемые в расчетах на изгиб.

Круглое сечение



Осевой момент инерции сечения:

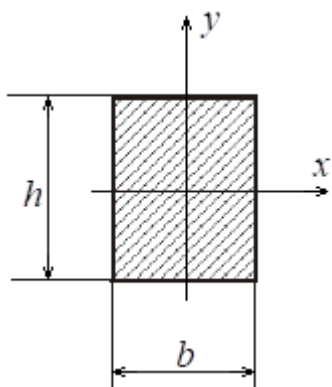
$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05 d^4, \text{ (м}^4\text{)}.$$

Осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{J_x}{0,5d}; \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{J_y}{0,5d}, \text{ (м}^3\text{)}.$$

$$W_x = W_y \approx 0,1d^3.$$

Прямоугольное сечение



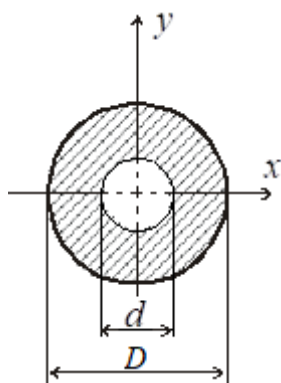
Осевой момент инерции сечения:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}, \text{ (м}^4\text{)}.$$

Осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}, \text{ (м}^3\text{)}.$$

Кольцевое сечение



Осевой момент инерции сечения: $J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4)$, (m^4).

Осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - c^4), (m^3).$$

Условие прочности при изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (4.3)$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение, выбирается так же, как при растяжении-сжатии.

Условие прочности позволяет решать три вида задач:

- подбор сечения $W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$;
- определение грузоподъемности $M_{\max} \leq [\sigma] W_x$;
- проверка прочности $\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_x} \leq [\sigma]$.

При расчетах балок на прочность необходимо учитывать, что при изгибе возникают деформации растяжения одних волокон и сжатия других. Если для материала балки $[\sigma]_p = [\sigma]_c$, то расчет ведут по наиболее нагруженным точкам сечения. Хрупкие материалы обычно характеризуются тем, что $[\sigma]_p < [\sigma]_c$. Такие балки необходимо проверять на прочность по растягивающим и сжимающим напряжениям. Сечения, симметричные относительно нейтральной оси, рассчитывают по наименьшему допускаемому напряжению.

При несимметричном, относительно нейтральной оси, сечении расчет следует вести и по растягивающим и по сжимающим напряжениям. При выборе рациональной (экономичной с точки зрения расходования материала) формы сечения балки, следует учитывать, что для повышения несущей способности (уменьшения σ_{\max}) необходимо стремиться к увеличению осевого момента сопротивления. Установлено, что к рациональным формам сечения при изгибе относятся те формы поперечного сечения, у которых при одинаковом расходе материала осевой момент сопротивления наибольший.

4.2 Пример выполнения задачи

Задача 4. Расчет на прочность и жесткость при изгибе.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ

1. Определяются опорные реакции бруса.
2. Определяются поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения. Строятся эпюры.
3. Устанавливается опасный участок, для которого записывается условие прочности и подбираются сечения бруса.
5. Выбирается экономичное сечение.

Задание

Для статически определимой балки

- определить поперечные силы и изгибающие моменты, построить эпюры;
- подобрать поперечное сечение заданной формы, исходя из условий прочности (принять коэффициент запаса $n=3$);
- построить график нормальных напряжений в опасном сечении;

Исходные данные (таблица ПЗ.3, расчетные схемы конструкций – рисунок ПЗ.1, механические характеристики материалов – таблицы ПЗ.4 – ПЗ.7)

№:	0	0	1
	A	B	C

Схема № 1 (рисунок 4.4); $l=10a=0,5 \text{ м}; a=0,05 \text{ м}; a_1=2a=0,1 \text{ м}; a_2=3a=0,15 \text{ м}; a_3=2a=0,1 \text{ м}; a_4=4a=0,2 \text{ м}; q=5 \text{ кН/м}; P_1=qa=0,25 \text{ кН}; m_1=6,0qa^2=0,075 \text{ кН м}^2; h=1,5b; d=0,8D$. Материал: брус III – Ст 20.

Механические характеристики материала: Ст.20: $E=200000$

МПа; $G=80000 \text{ МПа}; \sigma_m=250 \text{ МПа}; \sigma_g=420 \text{ МПа}$.

Коэффициент запаса принять $n=3$.

Определим вертикальные реакции в шарнирных опорах R_A, R_B . Уравнения равновесия для статически определимой балки:

$$\begin{cases} \sum M_B^i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_A \cdot 10a + m_1 + q \cdot 4a \cdot 0 + P_1 \cdot 2a = 0 \\ -R_B \cdot 10a - m_1 - q \cdot 4a \cdot 10a + P_1 \cdot 8a = 0 \end{cases}$$

$$R_A = \frac{m_1 + P_1 \cdot 2a}{10a} = 0,8qa = 0,20 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{-m_1 - q \cdot 5a \cdot 10a + P_1 \cdot 8a}{10a} = -3,8qa = -0,95 \text{ кН};$$

проверка

$$\sum Y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + R_B - P_1 + q \cdot 4a = 0;$$

проверка сошлась

Определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \leq z \leq 2a$ (справа)

$$Q_1 = -qz$$

$$M_1 = 0,5qz^2$$

Тогда на границах участка

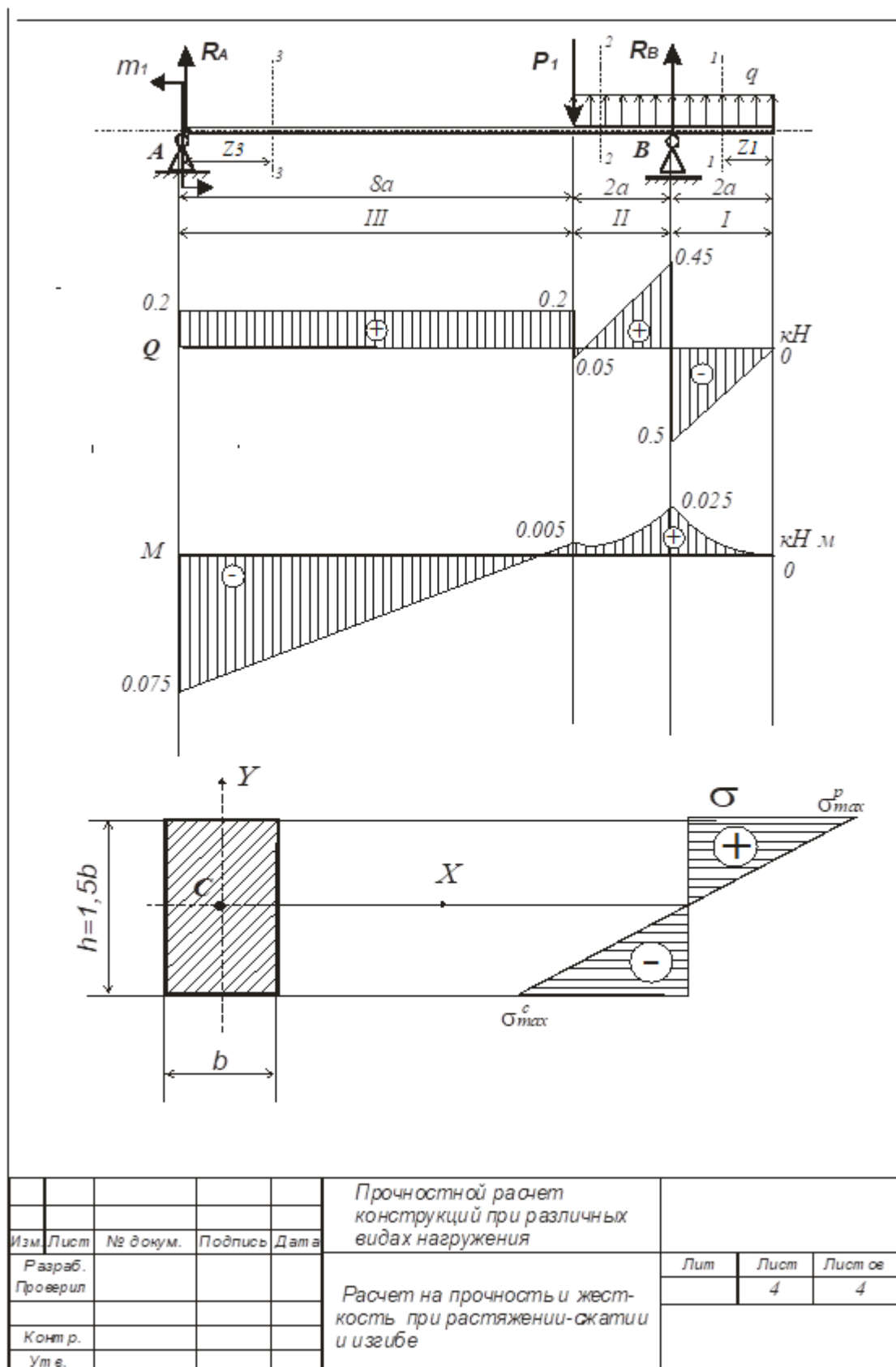
$$Q_{1(z=0)} = 0 \quad Q_{1(z=2a)} = -2qa = -0,5 \text{ кН}$$

$$M_{1(z=0)} = 0 \quad M_{1(z=2a)} = 2qa^2 = 0,025 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

II участок: $2a \leq z \leq 4a$ (справа)

$$Q_2 = -qz - R_B$$

$$M_2 = 0,5qz^2 + R_B(z - 2a)$$



То

Рисунок 4.4 – Графическая часть

гда на границах участка

$$Q_{2(z=2a)} = 1,8qa = 0,45 \text{ кН}$$

$$Q_{2(z=4a)} = -0,2qa = -0,05 \text{ кН}$$

$$M_{2(z=2a)} = 2qa^2 = 0,025 \text{ кНм}$$

$$M_{2(z=4a)} = 0,4qa^2 = 0,005 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

III участок: $0 \leq z \leq 8a$ (слева)
$$\begin{aligned} Q_3 &= R_A \\ M_3 &= R_A z - m_1 \end{aligned}$$

Тогда на границах участка

$$Q_{3(z=0)} = 0,8qa = 0,2 \text{ кН}$$

$$Q_{3(z=8a)} = 0,8qa = 0,2 \text{ кН}$$

$$M_{3(z=0)} = -6qa^2 = -0,075 \text{ кНм}$$

$$M_{3(z=8a)} = 0,4qa^2 = 0,005 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Опасное сечение – сечение A, $M_{\max} = -6qa^2 = -0,075 \text{ кНм}$.

Так как в опасном сечении момент отрицательный, верхние волокна растянуты, нижние - сжаты.

Подбор сечений

Условие прочности

$$\sigma_{\max}^p = \frac{|M_{\max}|}{W_x} = \frac{6qa^2}{W_x} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_m}{n} = 83,33 \text{ МПа},$$

$$\Rightarrow W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{75}{83,33 \cdot 10^6} = 0,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 0,9 \text{ см}^3$$

1. Прямоугольное $h/b=1,5;$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = 0,375b^3$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{0,9}{0,375}} = 0,0134 \text{ м} = 1,34 \text{ см}, \quad F = b \cdot h = 2,69 \text{ см}^2$$

2. Круглое

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{0,9}{0,1}} = 0,0210 \text{ м} = 2,10 \text{ см}, \quad F = \frac{\pi d^2}{4} = 3,46 \text{ см}^2$$

3. Кольцевое $d/D=0,8;$

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) = 0,0580 D^3;$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{0,9}{0,0580}} = 0,0250 \text{ м} = 2,5 \text{ см}, \quad F = \frac{\pi D^2}{4} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right) = 1,77 \text{ см}^2$$

Наиболее экономичным является кольцевое сечение, затем прямоугольное (квадратное сечение) сечения. Наименее экономичным является круглое сечение (таблица 4.1).

Таблица 4.1 Сравнение сечений

Сечение	$W_x, \text{ см}^3$	$F, \text{ см}^2$	$F/F_{\text{кольца}}$
Кольцевое	0,9	1,77	1
Прямоугольное	0,9	2,69	1,52
Круглое	0,9	3,46	1,96

Построение графика нормальных напряжений для прямоугольного сечения. Нейтральная ось сечения проходит через центр тяжести сечения C . На верхней границе сечения наибольшие положительные напряжения σ_{\max}^p , на нижней границе сечения – наибольшие отрицательные напряжения σ_{\max}^c .

$$\sigma_{\max}^p = [\sigma] = 83,33 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\max}^c = -\sigma_{\max}^p.$$

.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Требование к оформлению расчетно-графической работы

Расчетно-графическая работа состоит из четырех листов графической части и пояснительной записки. Графическая часть выполняется на чертежной бумаге формата А4 по ГОСТ 2.301-68. Каждый лист чертежей должен иметь основную надпись (угловой штамп), расположенную в правом нижнем углу формата, и содержательные заголовки к каждому построению на листе. Все надписи делаются чертежным шрифтом, начинаются с прописных букв и располагаются параллельно основной надписи. Построения на листах делаются в масштабах в соответствии с ГОСТ 2.301-68. Текст пояснительной записки размещается на одной стороне писчей бумаги формата А4. Рукописный текст и формулы пишутся чернилами или пастой. Пояснительная записка должна содержать титульный лист, задание, основной текст записки, включающий четыре раздела, список использованной литературы.

2. Пример выбора исходных данных

Для выбора исходных данных необходимо под тремя последними цифрами номера зачетной книжки подписать буквы А, В, С. Из каждого вертикального столбца таблицы П1, обозначенного внизу буквой, взять число, стоящее в горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы.

Например, № 31324. При $C = 4$, $B = 2$, $A = 3$ получим следующее:

Схема № 4, $a=0,3$ м; момент пары сил $M=4$ кН м; сосредоточенная сила $P_1=3$ кН; $\alpha_1=45^\circ$; точка приложения E ; сосредоточенная сила $P_2=2$ кН; точка приложения K ; $\alpha_2=30^\circ$; интенсивность распределенной нагрузки $q=6$ кН/м; участок действия распределенной нагрузки CL .

Расчетная схема, соответствующая выбранным данным, показана на рисунке П2.1.

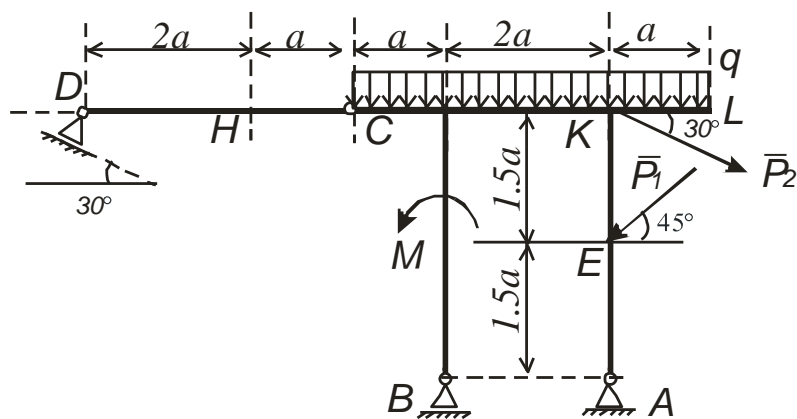
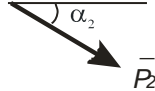


Рисунок П2.1 – Построение расчетной схемы конструкции (вариант 324)

3. Исходные данные для выполнения расчетно-графической работы.

3.1 Задача 1. Определить реакции опор и давление во внутреннем шарнире составной плоской рамы.

Таблица П3.1 Исходные данные

№	Схема	a, m	$M, кН\cdot м$	α_1  \bar{P}_1			α_2  \bar{P}_2			Распределенная нагрузка		
				Точка приложения	$\alpha_1, ^\circ$	$P_1, кН$	Точка приложения	$\alpha_2, ^\circ$	$P_2, кН$	участок	$q, кН/м$	Направление
1	1	0,2	2	L	45	1	E	60	3	СК	4	На горизонтальных участках  На вертикальных участках
2	2	0,3	3	E	60	2	K	30	4	CL	5	
3	3	0,4	4	H	30	3	L	60	2	EK	6	
4	4	0,2	2	E	45	1	L	30	3	СК	4	
5	5	0,3	3	K	30	2	E	45	4	CL	5	
6	6	0,4	4	L	60	3	H	45	2	EK	6	
7	7	0,2	2	H	30	1	L	60	3	СК	4	
8	8	0,3	3	E	45	2	H	60	4	CL	5	


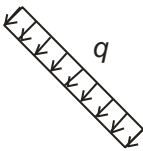
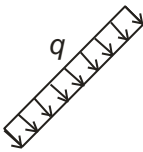
9	9	0,4	4	L	30	3	H	45	2	CK	6	 <p>На наклон- ных участ- ках</p>  
0	0	0,2	3	H	60	2	E	30	4	CL	5	
	C	B	A	B	C	A	B	C	A	B	A	

Таблица ПЗ.2. Схемы конструкций

<p><u>схема 1</u></p>	<p><u>схема 2</u></p>
<p><u>схема 3</u></p>	<p><u>схема 4</u></p>
<p><u>схема 5</u></p>	<p><u>схема 6</u></p>

Продолжение таблицы ПЗ.2.

схема 7

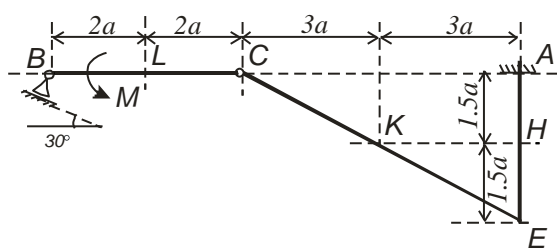


схема 8

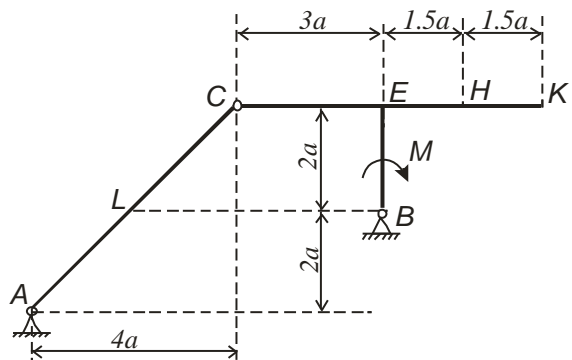


схема 9

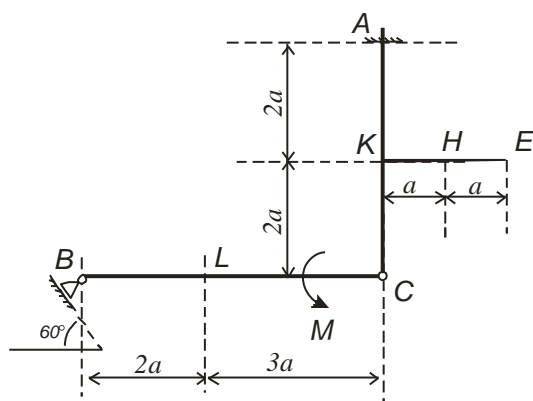
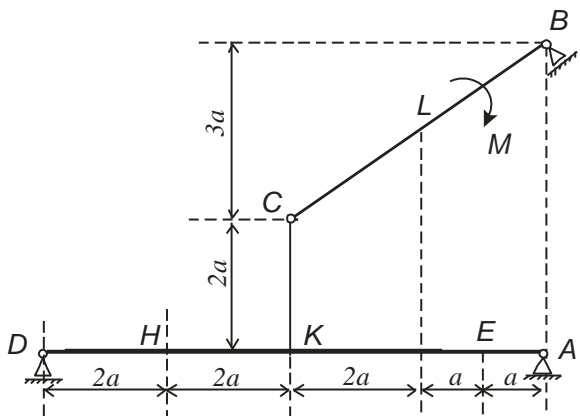


схема 0



3.2. Задача 2. Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии

Задача 3. Расчет на прочность и жесткость при кручении

Задание 4. Расчет на прочность и жесткость при изгибе

Таблица ПЗ.3 Исходные данные

№	Схе- ма	$l=10$ a (м)	a_1	a_2	a_3	a_4	q (кН/м)	P_1	P_2	m_1	m_2	$h/$ b	$d/$ D	Материал			
														Брус I	Брус II	Брус III	Брус IV
1	1	0,4	2 a	3 a	5 a	3a	5	1,0q a	1,5q a	5,0qa 2	5,5qa 2	1, 0	0,4	ПСМД	ЛО 90- 1	СЧ 18-36	Ст.20
2	2	0,5	3 a	4 a	2 a	4a	10	2,0q a	2,5q a	6,0qa 2	6,5qa 2	1, 5	0,5	сополи- меры полиамида	ЛО 70- 1	СЧ 24-44	Ст.30
3	3	0,6	2 a	5 a	5 a	2a	15	3,0q a	3,5q a	7,0qa 2	7,5qa 2	2, 0	0,6	капролон В	ЛС 74- 3	СЧ 32-52	Ст.40
4	4	0,8	4 a	2 a	4 a	3a	20	4,0q a	4,5q a	8,0qa 2	8,5qa 2	2, 5	0,7	капрон	ЛС 63- 3	СЧ 38-60	Ст.50
5	5	1,0	3 a	3 a	2 a	5a	5	5,0q a	5,5q a	9,0qa 2	9,5qa 2	3, 0	0,8	У5-301-41	ЛС 60- 1	СЧ 40-64	Ст.60

6	6	0,4	2 <i>a</i>	4 <i>a</i>	3 <i>a</i>	2 <i>a</i>	10	1,0 <i>q</i> <i>a</i>	1,5 <i>q</i> <i>a</i>	5,0 <i>qa</i> ²	5,5 <i>qa</i> ²	1, 0	0,4	ПСМД	АМг 3	СЧ 18-36	ВТ 5
7	7	0,5	3 <i>a</i>	5 <i>a</i>	3 <i>a</i>	3 <i>a</i>	15	2,0 <i>q</i> <i>a</i>	2,5 <i>q</i> <i>a</i>	6,0 <i>qa</i> ²	6,5 <i>qa</i> ²	1, 5	0,5	сополи- меры полиамида	АМг 5	СЧ 24-44	ВТ 6
8	8	0,6	2 <i>a</i>	2 <i>a</i>	3 <i>a</i>	4 <i>a</i>	20	3,0 <i>q</i> <i>a</i>	3,5 <i>q</i> <i>a</i>	7,0 <i>qa</i> ²	7,5 <i>qa</i> ²	2, 0	0,6	капролон В	АМг 6	СЧ 32-52	ВТ 14
9	9	0,8	4 <i>a</i>	3 <i>a</i>	4 <i>a</i>	2 <i>a</i>	5	4,0 <i>q</i> <i>a</i>	4,5 <i>q</i> <i>a</i>	8,0 <i>qa</i> ²	8,5 <i>qa</i> ²	2, 5	0,7	капрон	АД 31	СЧ 38-60	ВТ 20
0	0	1,0	3 <i>a</i>	2 <i>a</i>	2 <i>a</i>	2 <i>a</i>	10	5,0 <i>q</i> <i>a</i>	5,5 <i>q</i> <i>a</i>	9,0 <i>qa</i> ²	9,5 <i>qa</i> ²	3, 0	0,8	У5-301-41	АД 33	СЧ 40-64	ВТ 21
	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>C</i>

Таблица ПЗ.4 Механические характеристики пластмасс

Марка	Модуль упругости E , МПа	Предел прочности при растяжении σ_{ϵ}^p , МПа	Предел прочности при сжатии σ_{ϵ}^c , МПа
Полистирол ПСМД	2700	37	100
Сополимеры полиамида	1600	70	120
Капролон В	2100	90	110
Капрон	2800	65	110
Фенопласт У5-301-41	2300	50	180

Таблица ПЗ.5 Механические характеристики чугуна

Марка	Модуль упругости E , МПа	Предел прочности при растяжении σ_{ϵ}^p , МПа	Предел прочности при сжатии σ_{ϵ}^c , МПа
СЧ 18-36	80000	180	700
СЧ 24-44	110000	240	1000
СЧ 32-52	130000	320	1200
СЧ 38-60	160000	380	1400
СЧ 40-64	170000	400	1600

Таблица ПЗ.6 Механические характеристики стали

Марка	Модуль упругости E , МПа	Модуль сдвига G , МПа	Предел текучести σ_m , МПа	Предел прочности σ_{ϵ} , МПа
Ст. 20	200000	80000	250	420
Ст. 30	200000	80000	300	500
Ст. 40	200000	80000	340	580
Ст. 50	200000	80000	380	640
Ст. 60	200000	80000	410	690

Таблица ПЗ.7 Механические характеристики сплавов цветных металлов

Марка	Модуль упру- гости E , МПа	Модуль сдвига G , МПа	Предел теку- чести σ_m , МПа	Предел проч- ности σ_σ , МПа
латунь				
ЛО 90-1	105000	40000	85	280
ЛО 70-1	105000	40000	110	350
ЛС 74-3	105000	40000	120	350
ЛС 63-3	105000	40000	120	320
ЛС 60-1	105000	40000	130	370
Алюминиевые сплавы				
АМг 3	70000	27000	80	180
АМг 5	70000	27000	110	250
АМг 6	70000	27000	150	300
АД 31	70000	27000	130	200
АД 33	70000	27000	180	250
Титановые сплавы				
ВТ 5	110000	42000	630	700
ВТ 6	110000	42000	750	800
ВТ 14	110000	42000	800	900
ВТ 20	110000	42000	830	950
ВТ 21	110000	42000	860	1000

Схема 1

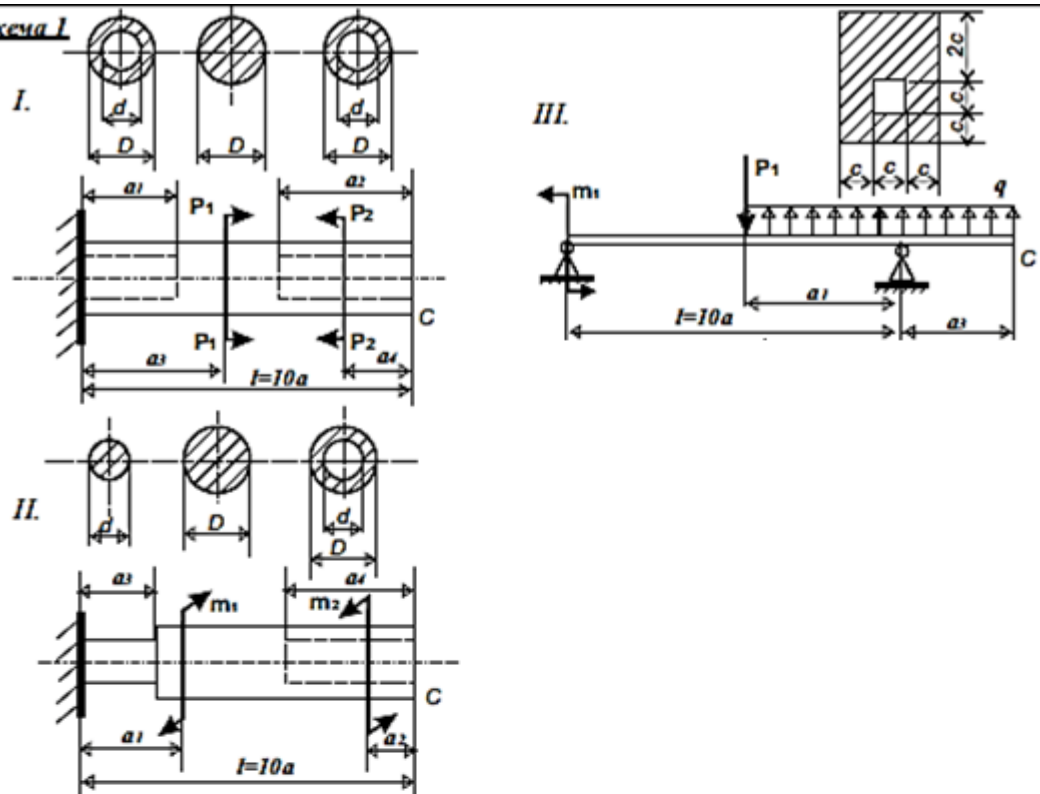


Схема 2

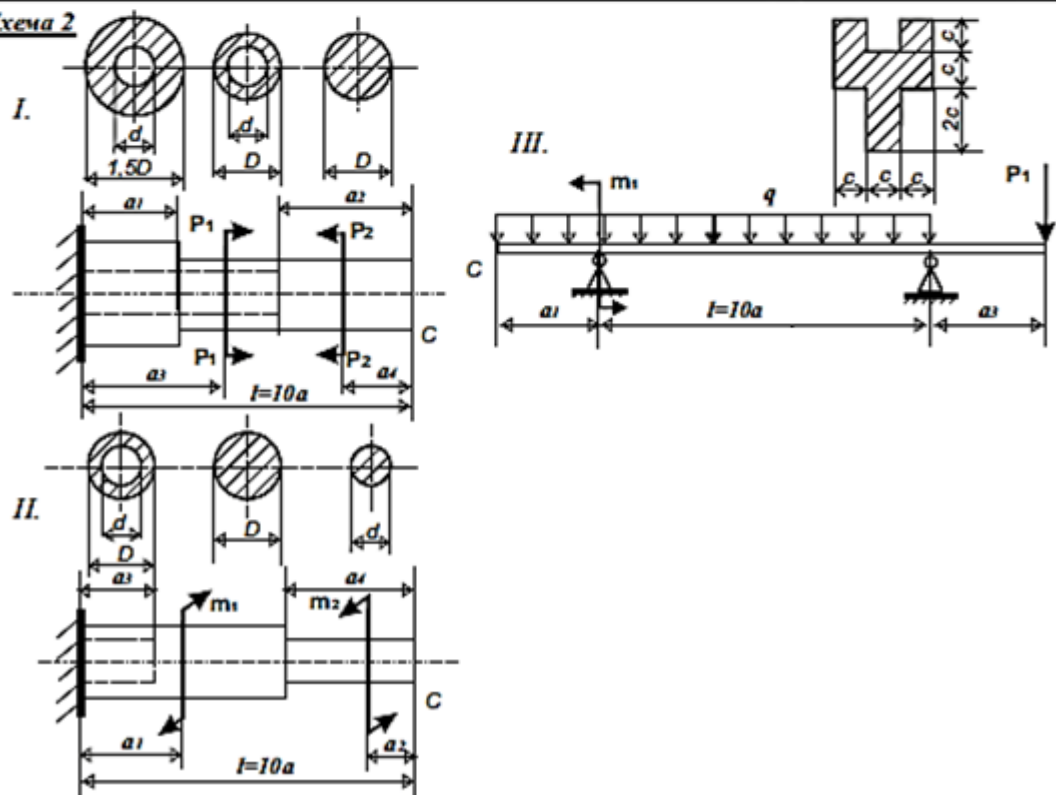
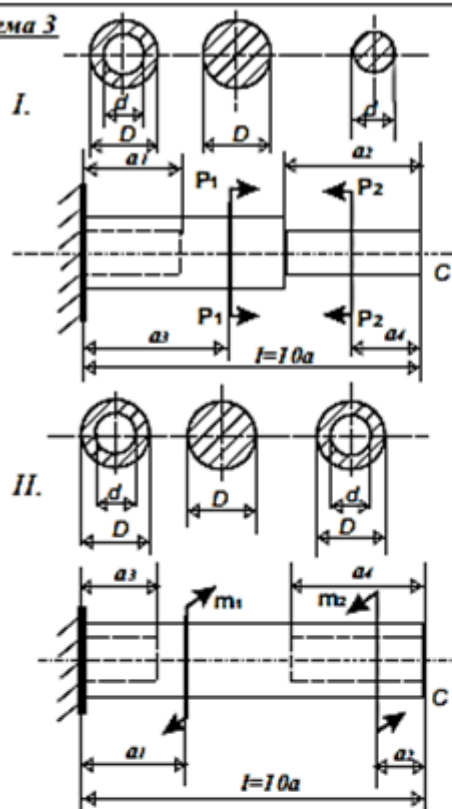


Схема 3



III.

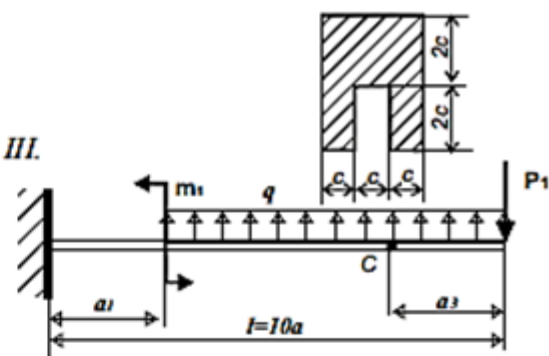
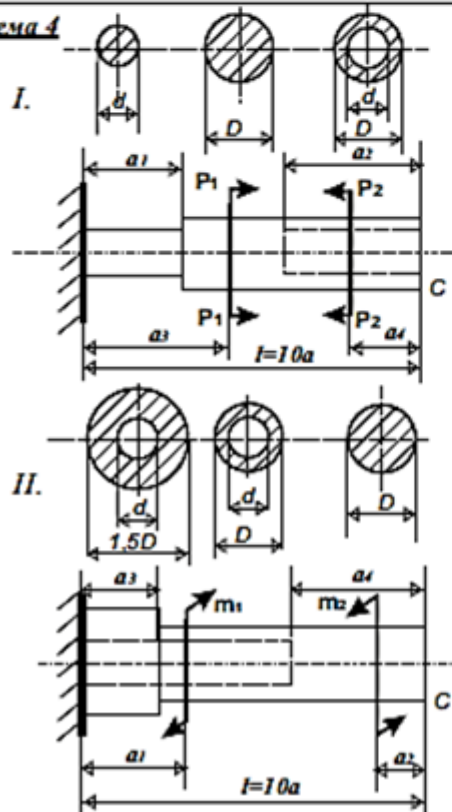


Схема 4



III.

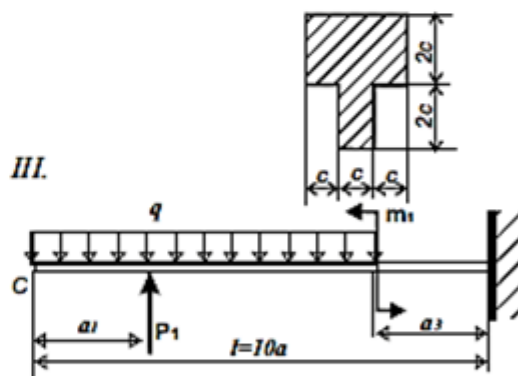
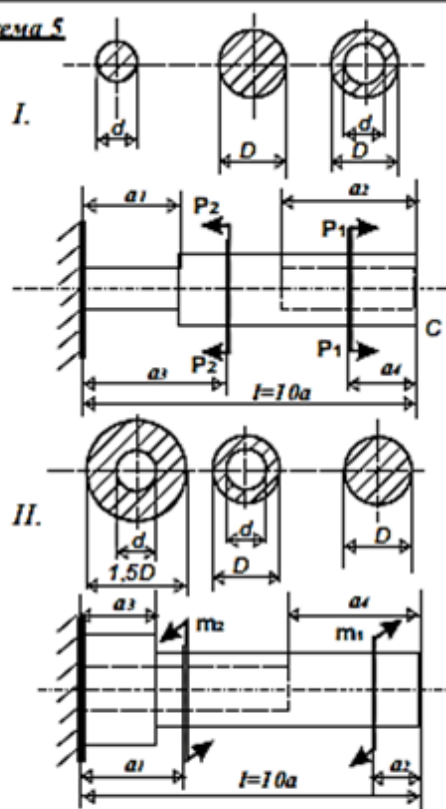


Схема 5



III.

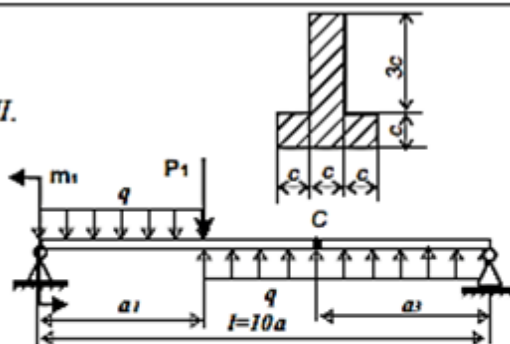
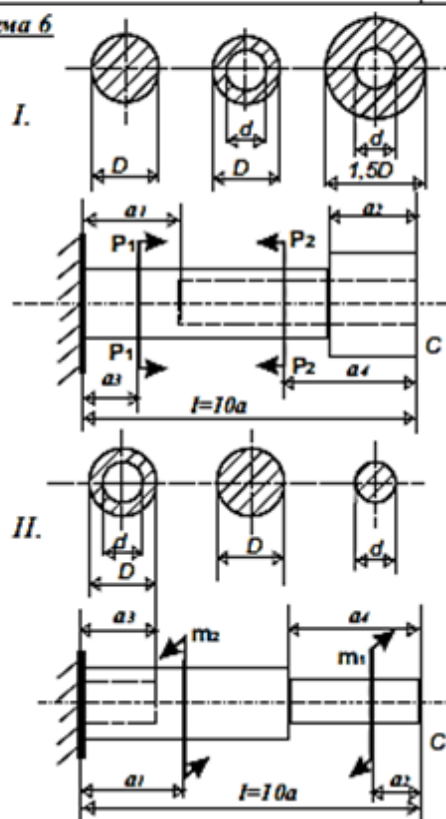


Схема 6



III.

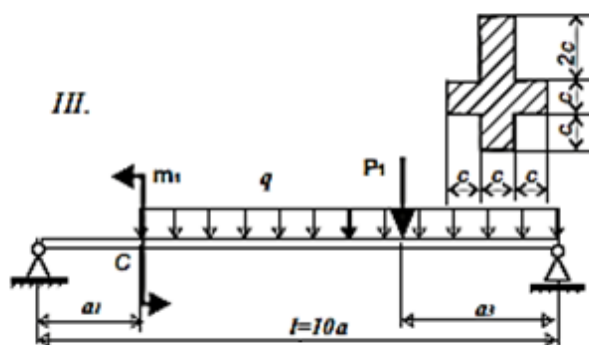


Схема 7

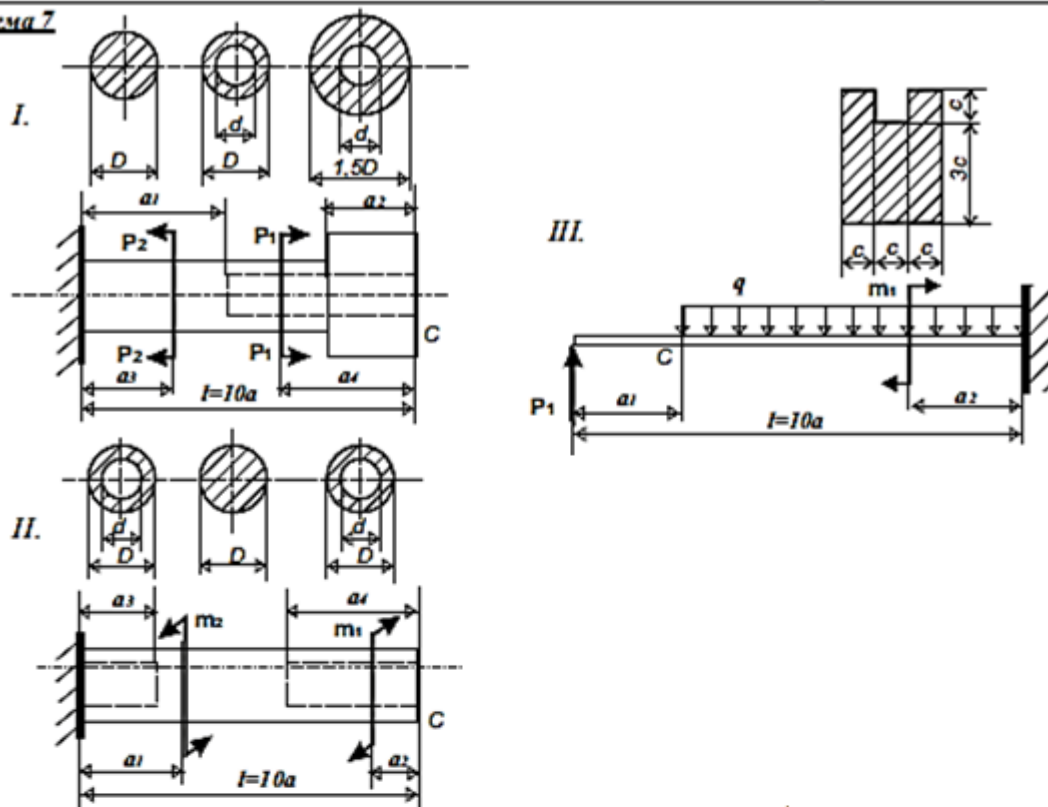
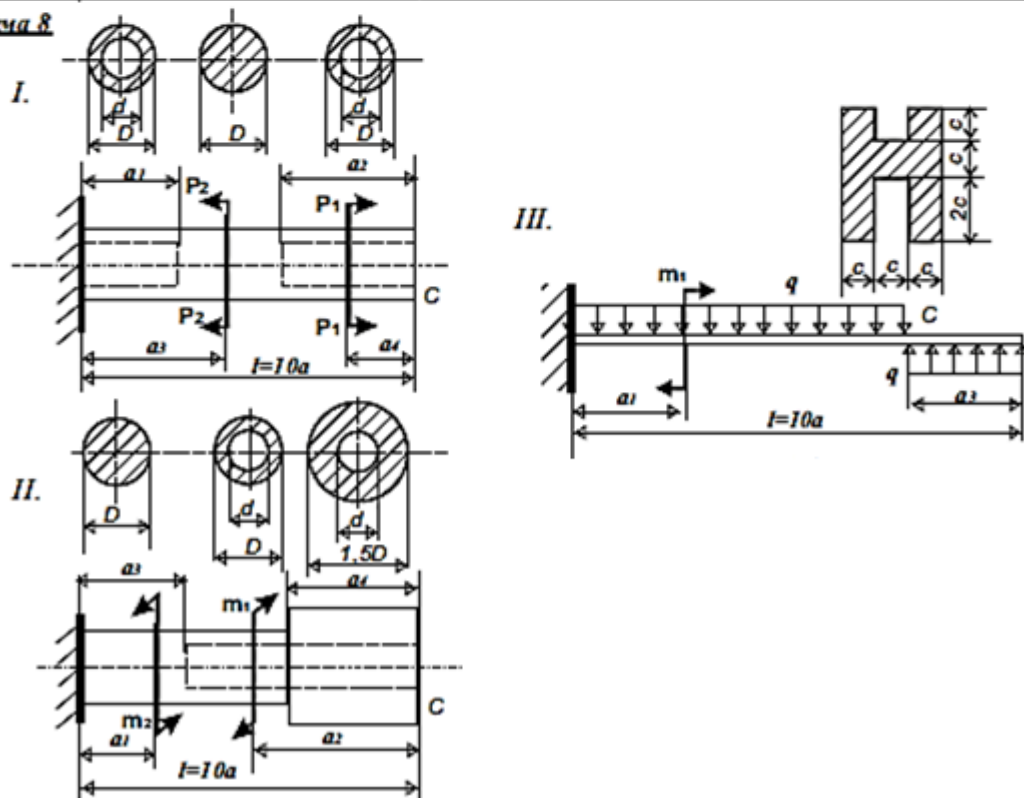


Схема 8



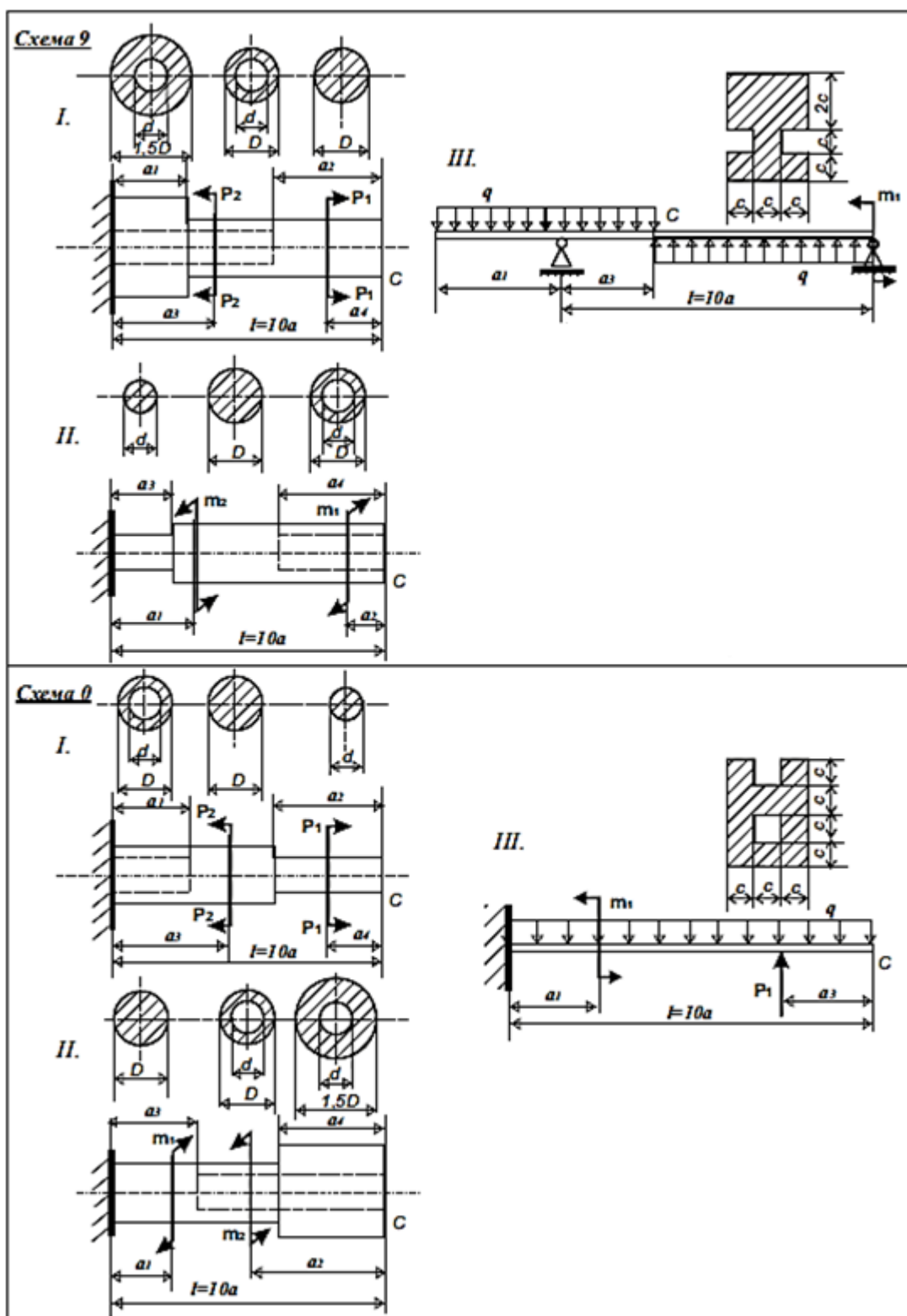


Рисунок ПЗ.1 – Расчетные схемы конструкций

Список литературы

1. Иосилевич, Г.Б. Прикладная механика / Г.Б. Иосилевич, Г.Б. Строганов, Г.С. Маслов. – М.: Высшая школа. – 1989.–351 с.
2. Прикладная механика [Текст] : учебник / П. И. Бегун, О. П. Кормилицын. - 2-е изд., испр. и доп. - СПб. : Политехника, 2006. - 463 с. : ил.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник/В.И. Феодосьев.– М.: МГТУ, 2018.–543 с.
4. Механика: учеб. пособие/ А.Н. Соловьев, В.П. Большенко, В.В. Котов и др. – Ростов н/Д.: ДГТУ, 2012.–178 с.